

# Topo-Consynch: 基于拓扑奈奎斯特极限与江桥截取准则的跨模态拓扑对齐框架

Lanhaijian (AI 辅助)

独立研究者, 中国

## 摘要

多模态感知系统通常配对连续视觉标量场与离散 LiDAR 点云，但二者固有的采样失配会产生伪拓扑结构，即拓扑混叠。现有拓扑数据分析（TDA）流程仅将拓扑不变量作为事后特征，缺乏区分物理意义上同调类与采样伪影的第一性原理边界。

本研究建立了拓扑奈奎斯特极限（TNL）——一种分离稳定拓扑模式与非稳定混叠分量的基础采样边界，进一步提出了跨模态拓扑融合的可操作规则：江桥拓扑截取准则（JTEC）。在数学层面，我们构建了双上同调框架：连续视觉侧采用光滑黎曼流形上子水平集过滤定义的持续德拉姆上同调，离散 LiDAR 测量值则诱导出 Vietoris–Rips 单纯复形过滤上的离散持续上同调。

TNL 定理证明：在三维场景流形的有限采样条件下，仅  $k = 0, 1$  阶上同调类能在持续德拉姆上同调与离散持续上同调之间保持稳定的对应关系；所有  $k \geq 2$  阶上同调签名均源于采样噪声，必须被截断。我们将  $\mathcal{L}_{\text{curl}} = \|\mathbf{d} \circ \mathbf{d} \omega\|^2$  解释为上同调一致性正则项，直接强制执行德拉姆恒等式  $\mathbf{d}^2 \equiv 0$ ，抑制高阶拓扑混叠。由此构建的 Topo-Consynch 框架在「上同调等价类」层面而非原始坐标匹配层面实现跨模态几何对齐。

该理论范式统一了连续微分拓扑与离散计算拓扑，为自动驾驶感知、遥感解译、具身智能提供了一种替代启发式拓扑滤波的严谨方案。

## 引言

自动驾驶感知流水线通常融合两类异构数据源：相机采集的连续强度场与 LiDAR 获取的稀疏离散点样本。现有配准算法多基于逐点几何对齐，忽略了全局拓扑一致性约束。拓扑数据分析（TDA）虽能提供多尺度结构不变量提取工具，但当前应用存在根本性缺陷：尚无严谨边界可判定哪些拓扑特征是可靠的，哪些是由采样诱导产生的伪结构。

持续同调已被广泛用于场景表征，但同调基于链复形构建，天然缺乏梯度优化所需的平滑性。定义在实值上链上的持续上同调规避了这一限制，然而学界普遍将离散持续上同调与场景流形底层连续真实拓扑割裂对待。

近期发展的持续德拉姆上同调将经典德拉姆理论拓展至过滤光滑流形，构建了连续空间多尺度上同调演化框架，但现有工作多聚焦单模态分析，未涉及连续场过滤与离散点云过滤之间的跨模态匹配问题。

本工作的核心贡献如下：

1. 构建了连接持续德拉姆上同调（连续视觉流形）与离散持续上同调（LiDAR Rips 复形）的双上同调框架；
2. 证明了拓扑奈奎斯特极限（TNL）：在三维场景流形的有限采样条件下，仅  $k = 0, 1$  阶上同调类可实现稳定逼近；
3. 提出了江桥拓扑截取准则（JTEC），系统性截断所有  $k \geq 2$  阶上同调分量，将其归类为拓扑混叠；
4. 将  $\mathcal{L}_{\text{curl}}$  解释为源自外微分恒等式  $\mathbf{d}^2 \equiv 0$  的上同调一致性检测器，而非经验性损失项；
5. 实例化 Topo-Consynch——一种基于 TNL 与 JTEC 的端到端拓扑融合原则，适用于多模态感知任务。

## 预备知识

### 连续德拉姆上同调与持续德拉姆上同调

我们将物理场景建模为嵌入  $\mathbb{R}^3$  的紧致  $C^2$  黎曼流形  $\mathcal{M}$ ，其流形可达半径记为  $\tau_{\mathcal{M}}$ 。视觉传感器诱导出光滑标量场  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ ，其内在拓扑结构可由**德拉姆上同调**严格表征：

$$H_{\text{dR}}^k(\mathcal{M}) = \frac{\ker \mathbf{d}^k : \Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M})}{\text{im } \mathbf{d}^{k-1} : \Omega^{k-1}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^k(\mathcal{M})},$$

其中  $\Omega^k(\mathcal{M})$  表示流形  $\mathcal{M}$  上全体光滑  $k$ -形式的集合， $\mathbf{d}$  为外微分算子，服从基础恒等式  $\mathbf{d}^2 \equiv 0$ 。经典德拉姆理论提供了单尺度拓扑不变量，编码了连续场景流形的内在孔洞、连通性及全局结构环路。

为建模视觉观测的多尺度拓扑演化，我们在子水平集过滤  $\mathcal{F}_c(t) = \{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \leq t\}$  上采用**持续德拉姆上同调**。该构造将静态德拉姆上同调拓展至过滤流形的嵌入序列，追踪连续上同调类随几何尺度的诞生与消亡。平滑欧拉示性数  $\hat{\chi}(t)$  可作为连续持续德拉姆谱演化的全局汇总统计量，支持对连续拓扑信号进行稳定的泰勒尺度分解。

## 面向 LiDAR 点云的离散持续上调

给定离散 LiDAR 点样本  $P \subset \mathcal{M}$ ，采样粒度为  $h$ （即流形上任意一点到最近采样点的最大距离），我们构建依赖尺度半径  $\varepsilon$  的 Vietoris–Rips 复形族  $\mathcal{R}(P, \varepsilon)$ 。离散拓扑签名通过**离散持续上调**提取：该方法作用于单纯过滤诱导的上链复形  $\{C^k, d^k\}$ ：

$$C^k = \mathbb{R}^{\#\{k\text{-单形}\}}, \quad d^k : C^k \rightarrow C^{k+1}.$$

离散持续上调追踪离散上调类的生命周期，生成持续条形码  $\text{Dgm}^k$ ，量化离散传感器采样涌现的多尺度拓扑结构。

关键优势在于：持续上调作用于实值上链函数，天然支持可微优化与基于梯度的拓扑学习——这是构建可训练多模态拓扑损失的核心前提。瓶颈距离界

$$d_B(\text{Dgm}_{\text{dR}}, \text{Dgm}_{\text{discrete}}) \leq 2h$$

刻画了连续持续德拉姆类与有限采样密度诱导的离散持续上调类之间的最大允许偏差，为跨模态拓扑对齐提供了稳定性保障。

## $\mathcal{L}_{\text{curl}}$ 正则项的理论诠释

外微分恒等式  $d^2 \equiv 0$  是连续德拉姆上调中的精确解析约束。在离散持续上调中，有限采样粒度会破坏这一精确性，产生违背德拉姆闭合条件的伪高阶上调模式。

我们定义的旋度正则项

$$\mathcal{L}_{\text{curl}} = \|d \circ d\omega\|^2$$

绝非经验性工程惩罚项，而是一种**上调一致性检测器**：它定量衡量采样诱导的  $d^2 \equiv 0$  恒等式破缺程度，选择性抑制无物理意义的  $k \geq 2$  阶离散上调混叠分量，同时保留有效的低阶拓扑共识。

## 拓扑奈奎斯特极限与江桥截取准则

拓扑奈奎斯特极限（TNL）与江桥截取准则（JTEC）的核心机制可通过双上调系统严格形式化：

- **连续侧**：持续德拉姆上调定义了场景流形的真实尺度依赖拓扑演化；
- **离散侧**：离散持续上调提供了 LiDAR 测量得到的、经尺度过滤的拓扑近似；
- **TNL 边界**：仅  $k = \{0, 1\}$  阶上调类具备  $\ell_k \geq 2h$  的生命周期，能保证持续德拉姆上调与离散持续上调之间的稳定对应；
- **JTEC 规则**：所有  $k \geq 2$  阶离散上调分量均为无连续德拉姆对应体的采样伪影，必须作为拓扑混叠被系统性截断。

该形式化将原基于同调的论证升级为完全自治的上调对偶框架，消除了连续流形几何与离散单纯拓扑之间的理论不对称。

## 上同调生命周期的标度律

对于具有可达半径  $\tau_{\mathcal{M}}$  的紧致黎曼流形, 上同调类的生命周期服从

$$\ell_k \sim \mathcal{O}(\tau_{\mathcal{M}}^{1/(k+1)}).$$

随着上同调阶数  $k$  升高, 特征结构尺度迅速收缩。当  $k \geq 2$  时, 内在尺度已低于采样阈值  $2h$ , 离散采样无法在无混叠的前提下解析这些模式。TNL 直接源于这一几何标度行为。

## JTEC 作为上同调空间的投影算子

从泛函视角看, JTEC 等价于在上同调空间上施加一个投影算子, 仅保留  $k = 0, 1$  阶上同调类张成的子空间。Topo-Consynch 的跨模态拓扑对齐损失仅在这一容许子空间内计算, 高阶上同调信息被主动丢弃;  $\mathcal{L}_{\text{curl}}$  则在优化过程中惩罚所有残留的高阶模式激活。

## TOPO-CONSYNCH 流水线

我们给出可操作的实施流程:

1. 从视觉标量场构建子水平集过滤  $\mathcal{F}_c(t)$ , 计算持续德拉姆上同调;
2. 从 LiDAR 点云构建 Vietoris-Rips 过滤  $\mathcal{R}(P, \varepsilon)$ , 计算离散持续上同调;
3. 执行 JTEC 截断: 仅保留  $k = 0, 1$  阶持续条形码;
4. 在低阶上同调签名之间计算拓扑匹配损失;
5. 联合优化, 并通过  $\mathcal{L}_{\text{curl}}$  抑制伪高阶离散上同调模式。

## 讨论

现有文献已将持续德拉姆上同调与离散外微积分 (DEC) 发展为独立的数学工具, 但本工作的核心区别在于: 提出了连接连续流形上同调与离散单纯上同调的跨模态采样边界 (TNL) 与可实施的截断准则 (JTEC)。

该框架揭示了与经典信号采样理论的深刻类比: 香农-奈奎斯特定理约束标量信号的频率带宽, 而 TNL 约束流形采样下可容许的上同调阶数。拓扑混叠正是傅里叶分析中频率混叠在几何-拓扑层面的对应物。

未来拓展方向包括: 基于 DEC 的数值验证、面向动态场景的等变上同调分析, 以及与神经隐式场景表征的融合。

## 讨论与未来工作

本工作为连续视觉流形与离散点云采样之间的跨模态拓扑对齐建立了基础采样边界。所提出的拓扑奈奎斯特极限 (TNL) 与江桥拓扑截取准则 (JTEC) 解决了拓扑数据分析领域长期存在的模糊性: 即如何区分具有物理意义的同调特征与采样诱导的拓扑混叠。尽管神经隐式场景表征可提供无网格信号混叠的连续可微几何嵌入, 但此类框架缺乏筛选伪高阶上同调伪影的内在约束。TNL-JTEC 形式化体系补足了这一缺失的拓扑带宽原理, 可作为适用于任意连续几何表征的第一性原理调节器。

我们为 Topo-Consynch 框架规划了结构化的多阶段研究路线图, 各迭代版本间存在严格的层级边界:

**v1.x (当前文稿)** 我们构建了双上同调框架，将连续场景流形的持续德拉姆上同调与点云 Vietoris–Rips 过滤的离散持续上同调配对。我们证明了断言  $K_{\max} \equiv 1$  的 TNL 定理，并提出了用于抑制  $k \geq 2$  阶拓扑混叠的 JTEC 准则。本研究的核心考察对象是单个上同调类  $H^k$ ，为跨模态拓扑匹配奠定了理论层面的基础公理。

**v2.0 (中短期扩展)** 两项互补性扩展将把框架从抽象代数拓扑提升至可数值执行的动态感知系统：

1. 基于离散外微积分 (DEC) 的计算实例化：将抽象的单纯上链复形替换为离散外微积分体系。对偶网格、离散霍奇星算子与霍奇分解将为外微分算子  $d$  赋予满足离散斯托克斯定理的几何一致性。在此框架下，正则项  $\mathcal{L}_{\text{curl}} = \|d \circ d\omega\|^2$  将获得明确的几何诠释——即对离散旋度破缺的  $L^2$  范数惩罚。
2. 面向动态场景的  $G$ -等变上同调：引入三维刚体运动群  $G = \text{SE}(3)$  的作用，将静态上同调扩展为  $G$ -等变上同调  $H_G^k(\mathcal{M})$ 。TNL 边界将针对等变拓扑特征做广义化推广，要求有效对齐算子  $C_{\text{eff}}$  满足  $G$ -协变性。

神经隐式场景表征将作为 v2.0 发展的核心计算载体：隐式场  $f_\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^c$  提供了连续、可任意查询的几何容器，DEC 算子与群等变约束可在其中联合优化。

**v3.0 (长期范式升级)** 研究对象将从单个上同调类发生质性的维度跃迁，升级为“上同调构型的模空间”。我们采用内外场范式：底层流形的连续德拉姆上同调构成**内模空间**  $\mathcal{H}_{\text{in}}$ ，离散采样诱导的离散持续上同调构成**外模空间**  $\mathcal{H}_{\text{out}}$ 。JTEC 将被重新定义为投影映射：

$$\Pi_{\text{JTEC}} : \mathcal{H}_{\text{in}} \times \mathcal{H}_{\text{out}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{low}},$$

将成对的上同调构型映射到由  $k = 0, 1$  阶类张成的容许低阶子空间。至此，拓扑对齐将被重新诠释为两个无限维参数空间之间的几何对应，为多模态感知建立完整的拓扑场论视角。

未来工作将首先在神经隐式表征之上实现 v2.0 组件，开展 TNL 与 JTEC 的定量数值验证，为后续 v3.0 阶段的模空间结构探索奠定实验基础。

## 结论

本工作构建了统一持续德拉姆上同调（连续视觉流形）与离散持续上同调（LiDAR 样本）的双上同调框架。拓扑奈奎斯特极限建立了第一性原理的采样边界，江桥截取准则则提供了消除拓扑混叠的可操作规则：系统性截断所有  $k \geq 2$  阶上同调分量。旋度正则项  $\mathcal{L}_{\text{curl}}$  源自德拉姆外微分恒等式，为 Topo-Consynch 多模态拓扑对齐原则奠定了自洽的理论基础。

该范式提供了鲁棒拓扑传感器融合的数学严谨路径，串联了微分几何、计算拓扑与具身感知三大领域。

## 致谢

本理论推导于上海市嘉定区江桥镇完成，后续修订版本与正式证明发布于虹桥大学科技学术网。

**声明：**理念先于存在，结构先于实体。源代码采用 Apache 2.0 许可，学术内容采用 CC BY 4.0 许可。

- 
- [1] C. Chen, M. K. Choi, J. Ye. 持续德拉姆上同调 [J]. arXiv preprint arXiv:2102.09378, 2021.
  - [2] M. Desbrun, A. N. Hirani, M. Leok, J. E. Marsden. 离散外微积分 [J]. arXiv preprint arXiv:math/0508341, 2005.
  - [3] F. Chazal, B. Michel. 拓扑数据分析导论：持续同调及其应用 [J]. arXiv preprint arXiv:1710.04024, 2017.