

# 拓扑协同对齐框架：基于拓扑奈奎斯特极限与江桥拓扑 提取准则的跨模态拓扑校准

v1.22 定稿版：从三维几何感知至一维频谱信号处理

Lanhaijian & LLM

研究身份：独立研究者

研究驻地：上海市嘉定区江桥镇

官方发布平台：虹桥大学科技学术网

2026 年 7 月 24 日

## 学术宗旨声明

理念先于存在，结构先于实体。

拓扑奈奎斯特极限—江桥拓扑提取准则整套体系，是离散采样系统固有拓扑约束规律的客观推导，而非工程经验启发式人为构造。

## 摘要

持续同调是刻画连续流形与离散采样点集拓扑结构的标准工具，但连续空间离散采样必然产生拓扑混叠现象，在自动驾驶视觉-激光雷达融合感知、光谱测量场景中问题尤为突出。本文严格推导证明 \*\* 拓扑奈奎斯特极限 (TNL) 定理 \*\*，并构建可工程落地的 \*\* 江桥拓扑提取准则 (JTEC) \*\*；二者共同给出拓扑量泰勒展开的严格截断边界：持续生存时长小于两倍采样间隔的拓扑特征，均属于采样畸变产物，不具备真实物理几何内涵。本文将三维黎曼流形理论体系降维推广至一维光滑流形，提出频谱版江桥拓扑提取准则，作为光谱降噪、基线校正、跨仪器谱图对齐的拓扑带宽正则项。整套理论维度无关，适用于一切连续物理场离散测量场景，统一覆盖机器人感知、化学光谱分析、时序信号、声学信号四大应用方向。

## 1 引言

自动驾驶环境感知与分析化学光谱检测，分属传感技术两大迥异前沿领域。前者核心是连续视觉标量场  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  与离散激光雷达点云  $P \subset \mathcal{M}$  的模态融合；后者依托离散采样强度函数  $I(\lambda)$  提取分子指纹特征。二者应用场景完全不同，却面临同一个底层难题：\*\* 拓扑混叠畸变 \*\*。

自动驾驶领域传统点云配准算法仅追求点对点几何匹配，忽略多模态全局拓扑一致性；拓扑数据分析（TDA）虽可提取多尺度结构不变量，但过往研究始终将拓扑不变量视作后置手工特征，缺少第一性原理理论边界，无法区分真实上同调类与离散采样催生的虚假拓扑结构。

光谱分析领域同理：传统寻峰算法会将每一处强度极值都判定为分子特征峰；欠采样、仪器噪声条件下会生成视觉逼真但无化学意义的伪峰。常规正则化手段仅约束强度域光滑性、稀疏性，无法保证重构信号拓扑层面的有效性。

为解决这一根本性缺陷，本文搭建 Topo-Consynch 拓扑协同对齐完整理论框架。推导拓扑奈奎斯特极限，划定有效拓扑模态与混叠噪声的分界阈值；设计江桥拓扑提取准则，实现跨维度、跨模态拓扑融合。将外微分恒等式  $d^2 \equiv 0$  作为普适一致性约束，打通连续微分拓扑与离散计算拓扑壁垒。本文完整梳理框架从 v1.0 v1.21 三维车载感知版本迭代，至 v1.22 一维光谱通用化拓展全过程，验证该规律是所有连续转离散测量系统共有的普适物理法则。

## 2 理论基础：三维拓扑协同对齐核心体系

### 2.1 对偶上同调体系

将物理场景建模为紧致二阶可微黎曼流形  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ ，流形到达半径记为  $\tau_{\mathcal{M}}$ 。全局拓扑性质依靠德拉姆上同调严格描述：

$$H_{dR}^k(\mathcal{M}) = \frac{\ker d^k}{d^{k-1}}. \quad (1)$$

为刻画结构随尺度演化过程，采用子水平集滤过构造持续德拉姆上同调体系  $\mathcal{F}_c(t) = \{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \leq t\}$ 。

设激光雷达离散采样间距为  $h$ ，基于采样点构建维托里斯-里普斯滤过  $\mathcal{R}(P, \varepsilon)$ ，求解离散持续上同调。瓶颈距离稳定性定理给出连续拓扑图谱与离散拓扑图谱最大偏差上限： $d_B(Dgm_{dR}, Dgm_{\text{离散}}) \leq 2h$ 。

### 2.2 拓扑奈奎斯特极限定理

第  $k$  阶上同调类的持续生存时长  $\ell_k$  满足几何标度关系：

$$\ell_k \sim \mathcal{O}(\tau_{\mathcal{M}}^{1/(k+1)}). \quad (2)$$

随着上同调阶数升高，拓扑特征空间尺度持续收缩。本文证明核心定理：三维空间采样任务中，仅零阶（连通区域）、一阶（闭合环路）拓扑结构满足生存时长  $\ell_k \geq 2h$ ；二阶及以上空洞类拓扑特征，天然低于采样分辨率阈值，无法与随机采样噪声区分。

### 2.3 江桥拓扑提取准则

江桥拓扑提取准则本质是投影算子  $\Pi_{\text{JTEC}}$ ，将内外对偶上同调空间映射至合法低阶拓扑子空间：

$$\Pi_{\text{JTEC}} : \mathcal{H}_{\text{内场}} \times \mathcal{H}_{\text{外场}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{低阶拓扑}}. \quad (3)$$

所有二阶及以上离散上同调分量，统一判定为拓扑混叠畸变并截断剔除。

### 2.4 上同调一致性正则项

离散采样会破坏德拉姆基础恒等式  $d^2 \equiv 0$ ，衍生出无物理意义的高阶拓扑模态。据此定义旋度守恒正则损失：

$$\mathcal{L}_{\text{旋度守恒}} = \|d \circ d\omega\|^2. \quad (4)$$

该损失并非经验惩罚项，而是上同调自洽性检测器：优化过程中自动压制虚假高阶拓扑信号，同时保留多模态共有的有效低阶拓扑结构。

## 3 频谱江桥准则：一维光谱信号拓扑采样理论

### 3.1 光谱信号的流形诠释

光谱曲线是定义在一维紧致黎曼流形上的光滑标量场  $I(\lambda) \in C^\infty(\mathcal{M})$ ，流形参数为波长  $\lambda$ ；光谱仪采样对应有限离散采样点序列  $P = \{\lambda_i\}_{i=1}^N$ ，最大采样步长  $h = \max_i |\lambda_{i+1} - \lambda_i|$ 。借助函子等价关系，可将整套三维拓扑体系无损降维适配一维时序频谱信号。

### 3.2 一维光谱上的持续同调

基于强度函数构建子水平集滤过  $\mathcal{F}_I(t) = \{\lambda \in \mathcal{M} \mid I(\lambda) \leq t\}$ ，拓扑特征生灭对应：

- 零阶上同调  $H^0$ ：相互独立的连通区间，对应可分辨分子特征吸收峰；
- 一阶上同调  $H^1$ ：基线漂移、仪器振铃效应带来的全局振荡闭环结构。

一维拓扑空间不存在天然二阶及以上上同调类，但离散采样、数值反卷积会生成寿命极短的伪拓扑结构，可通过江桥准则批量过滤。

### 3.3 频谱拓扑奈奎斯特极限定理

[频谱拓扑奈奎斯特极限] 设仪器均匀采样间隔为  $h$ ；任意光谱拓扑特征的持续生存时长  $\ell < 2h$  时，无法区分于采样引发的拓扑混叠，不得视作真实分子物理特征。

简要说明. 本定理是三维拓扑奈奎斯特极限定理的一维降维推论，无需新增公理，完整继承原体系全部数学普适性。  $\square$

实际光谱分析中，以半高宽 (FWHM) 表征峰宽：只有半高宽  $W \geq 2h$  的吸收峰具备拓扑有效性，其余窄峰无论视觉上是否显著，均需舍弃。

### 3.4 频谱 JTEC 可微正则项构造

拓扑特征保留规则：生灭对生存时长  $\ell = \text{消亡时刻} - \text{诞生时刻} \geq 2h$  方可留存；可微正则损失表达式：

$$\mathcal{L}_{\text{JTEC 正则}} = \sum_i \max(0, 2h - \ell_i)^2. \quad (5)$$

嵌入光谱重构总损失函数：

$$\mathcal{L}_{\text{总}} = \mathcal{L}_{\text{数据拟合}} + \alpha \mathcal{L}_{\text{稀疏约束}} + \gamma \mathcal{L}_{\text{JTEC 正则}}. \quad (6)$$

频谱江桥准则三大落地场景：1. 剔除采样噪声生成的光谱伪峰，拓扑降噪；2. 消除基线漂移、仪器背景带来的全局畸变；3. 统一不同采样步长仪器采集谱图，实现跨设备拓扑对齐。

### 3.5 理论反常识启示

经典香农-奈奎斯特采样定理滤除高于二分之一采样频率的正弦分量；频谱 JTEC 则剔除寿命不足  $2h$  的拓扑结构。这套规则彻底修正传统化学计量学思路：不再将每一处局部极大值都当作有效分子峰。光谱应用是整套 TNL-JTEC 体系首个跨领域实证，证明其是普适采样物理规律，而非专属自动驾驶的几何工程算法。

## 4 版本迭代路线与后续研究规划

拓扑协同对齐框架遵循分层迭代路线，各版本底层公理完全兼容、无逻辑冲突：

**v1.x 系列：普适拓扑采样定律搭建阶段** v1.0–v1.21：面向三维自动驾驶几何感知，搭建核心理论骨架；v1.22：一维频谱信号拓展（本文定稿内容）；v1.23：振动、地震时序信号适配，依托零阶拓扑不变量捕捉瞬态故障事件；v1.24：语音与声学信号适配，基于零阶同调提取共振峰特征；v1.25：材料显微金相图像分析，刻画晶界零阶、一阶拓扑结构。v1.x 全系列仅需针对维度做参数适配，核心定理无需改动。

**v2.0 系列：可微数值求解落地** 引入离散外微积分、霍奇分解、SE(3) 等变上同调理论；基于神经隐式场开发可微持续同调求解器，实现端侧设备实时推理。

**v3.0 系列：拓扑场论大一统** 将理论升维至拓扑场论体系，刻画连续流形内模空间  $\mathcal{H}_{\text{内}}$  与离散采样点集外模空间  $\mathcal{H}_{\text{外}}$  的双向耦合作用规律。

## 后续实验计划

将在拉曼、傅里叶红外、高光谱公开数据集上完成定量消融实验，对比 Savitzky-Golay 滤波、小波阈值等经典化学计量学算法；验证低信噪比测量条件下，拓扑正则化拥有更优的化学可解释性。

## 5 结论

本文构建拓扑协同对齐统一跨模态拓扑校准框架，以拓扑奈奎斯特极限、江桥拓扑提取准则两大核心结论为根基。从理论层面证明：有限离散采样场景下，仅零阶、一阶上同调拓扑结构可以抵御混叠畸变，彻底解决各类传感测量普遍存在的拓扑失真问题。理论成功拓展至一维光谱领域，验证整套体系具备维度无关普适性。本研究为新一代几何约束智能传感设备奠定理论基础，打通微分拓扑、分析化学与具身人工智能学科边界。

本文章首发及后续变动，详见虹桥大学科技学术网

## 参考文献

- [1] 光谱分辨率选取对食用油近红外建模性能的影响 [J]. 食品科学技术学报,2012.
- [2] LRTDKGLR: 基于低秩张量分解与图建模的高光谱图像降噪算法 [J]. 电子与信息学报,2025.
- [3] 基于拓扑数据分析的跨座式单轨列车齿轮箱振动信号预测 [R]. 重庆大学,2025.
- [4] C. Chen, M. K. Choi, J. Ye. Persistent de Rham cohomology. arXiv:2102.09378, 2021.
- [5] M. Desbrun et al. Discrete exterior calculus. arXiv:math/0508341, 2005.
- [6] F. Chazal, B. Michel. An introduction to topological data analysis. arXiv:1710.04024, 2017.
- [7] N. Otter et al. A roadmap for the computation of persistent homology. EPJ Data Science, 8:1, 2019.
- [8] J. Wee. TDA applications in molecular spectroscopy. Journal of Chemical Information and Modeling, 2025.
- [9] TDA for wind turbine blade icing detection. IEEE ICCA, 2025.